# Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, их свойства. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

***Несобственные интегралы 1-го рода***

Пусть определена на и интегрируема на любом отрезке вида . Зафиксируем и рассмотрим определенный интеграл .

***Опр.*** Несобственным интегралом 1 рода функции от до называется предел при определенного интеграла от до :

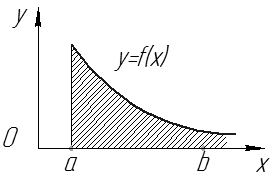
Если конечный предел , то несобственный интеграл от до называется сходящимся, в противном случае (т.е. если предел равен или не существует) – расходящимся.

Рис. 8

***Геометрический смысл –***  площадь бесконечной фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 8).

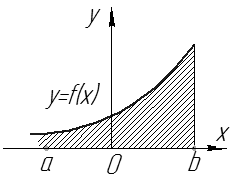
******Аналогично для функции , определенной на по определению

Рис. 9

(см. рис. 9).

***Свойство линейности.***

Если , сходятся, то сходятся интегралы

.

Аналогично для .

***Вычисление несобственного интеграла 1-го рода.***

Пусть – первообразная для на , тогда

Таким образом, сходится конечный предел первообразной

*Примеры*.

,

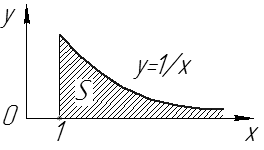


Рис. 10

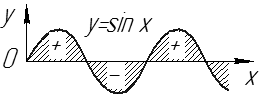


Рис. 11

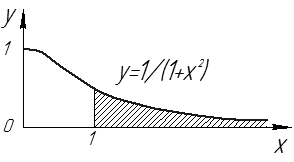
**

Рис. 12

***Исследование несобственных интегралов 1-го рода на сходимость.***

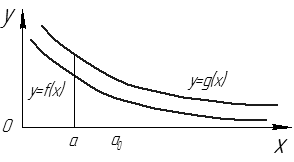
***Признаки сходимости:***

Рис. 13

1. *Признак сравнения.*

Пусть

1. Если сходится, то также сходится (см. рис. 13).
2. Если расходится, то также расходится.
3. *Предельный признак сравнения*:

пусть для и при , т.е. .

Тогда и оба сходятся или оба расходятся.

1. Если сходится , то сходится и (обратное неверно!).

В качестве «образцов» интегралов для сравнения обычно используются интегралы

*(a>0).*

*Примеры*.

1. .

при расходится исходный интеграл расходится по предельному признаку.

При ; ; ,

*;* интеграл сходится по предельному признаку.

3.

Т.к. при (логарифм растет медленней степенной функции), то исходный интеграл сходится по признаку сравнения.

.

– сходится сходится по признаку 3.

***Несобственные интегралы 2-го рода***

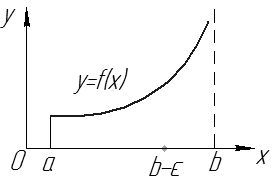
Пусть непрерывна на , но не ограничена в левой окрестности точки . Определенный интеграл не существует, т.к. – неограниченная. Рассмотрим . Т.к. непрерывна на , то – определенный интеграл.

Рис. 14

***Опр.*** Несобственным интегралом 2 рода по от функции , неограниченной в окрестности точки , называется предел

Если существует конечный предел (1.8.2), то несобственный интеграл 2-го рода называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

***Геометрический смысл***:

при – площадь фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 15).

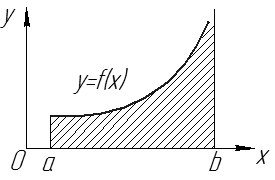
******

Рис. 15

– несобственный интеграл 2-го рода для функции с особой точкой .

– несобственный интеграл 2-го рода для функции с особой точкой

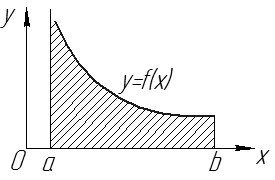
******

Рис. 16

***Свойство линейности.***

Если , сходятся, то сходятся интегралы

.

***Вычисление несобственного интеграла 2-го рода.***

Случай функции с особой точкой

– первообразная для

Таким образом, сходится конечный предел первообразной .

*Примеры*.

Рассмотрим интегралы

Рассмотрим случай интеграла с особой точкой в левом конце отрезка:

Случай

Аналогично рассматривается интеграл с особой точкой в правом конце отрезка. Таким образом

имеет при порядок роста относительно ).

***Исследование несобственных интегралов 2-го рода на сходимость.***

***Признаки сходимости:***

1. *Признак сравнения*:

пусть

1. Если сходится, то также сходится.
2. Если расходится, то также расходится.
3. *Предельный признак сравнения.*

Пусть для и при , т.е. .

Тогда и оба сходятся или оба расходятся.

1. Если сходится , то сходится и .

*Примеры*.

1.

При ,

2.

При

***Замечание***: если непрерывна на кроме точки и не ограничена в окрестности точки , тогда

(для первого и второго интегралов в правой части особой точкой является правый или левый конец отрезка).

сходится сходятся оба интеграла и

*Пример*.

***Примеры несобственных интегралов с несколькими особыми точками***

Исходный интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части:

1. .
2. .

.

(несобственный интеграл 2-го рода + несобственный интеграл 1-го рода ).

1. – сходится при
2. – сходится при

Значит, расходится для любого .

.

При

При .

Таким образом исходный интеграл расходится.

***Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.***

Рассмотрим несобственный интеграл

***Опр.*** Несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл .

***Опр.*** Несобственный интеграл называется условно сходящимся, если он сходится, но интеграл расходится.

*Пример*.

*(*без доказательства, см. рис. 17).

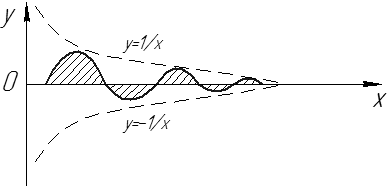


Рис. 17

# Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.

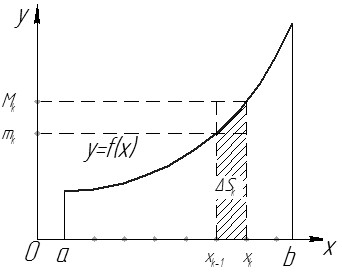
***Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах***

Рис. 18

непрерывна на

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями Пусть – разбиение отрезка на элементарные отрезки ; ; .

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию . Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на

заключена между площадями прямоугольников с высотой и

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы, соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу); при

Из (1.9.1) получаем:

***Замечания***:

1. (см. рис. 19.)

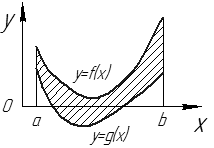


Рис. 19

1. (см. рис. 20).

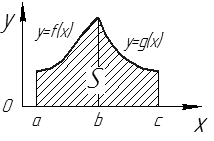


Рис. 20

1. (см. рис. 21).

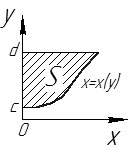
******

Рис. 21

***Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.***

Рассмотрим кривую, , где функция непрерывна на .

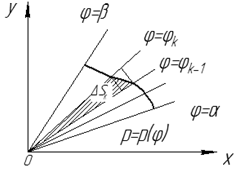


Рис. 22

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями . Пусть – разбиение :

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию (см. рис. 22). Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции :

*.*

заключена между площадями круговых секторов радиусов и :

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы функции , соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы).

При из (1.9.2) получаем: .

***Замечания***:

1. (см. рис. 23).

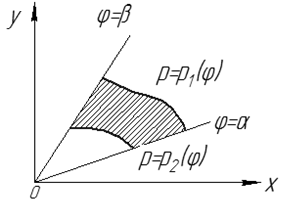
**

Рис. 23

1. (см. рис. 24).

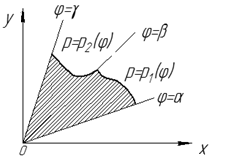


Рис. 24

# 

# Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения.

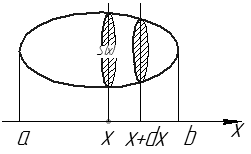


Рис. 25

Рассмотрим в пространстве тело , каждая точка которого удовлетворяет неравенству . Пусть площадь сечения плоскостью равна непрерывна на . Найдем объем тела . Зафиксируем . Рассмотрим малое . Рассмотрим часть (слой) тела , соответствующий отрезку . Объем этой малой части приблизительно (c точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно равен объему цилиндра с площадью основания и высотой

Суммируя по всем таким тонким слоям, получаем

***Объемы тел вращения.***

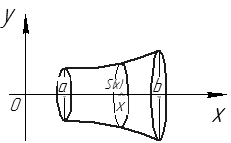


Рис. 26

Фигура, ограниченная линиями , вращается вокруг оси (см. рис. 26).

Найдем объем тела вращения. Зафиксируем . Сечение тела плоскостью – круг радиуса . Тогда

Ту же фигуру вращаем вокруг оси (см. рис. 27).

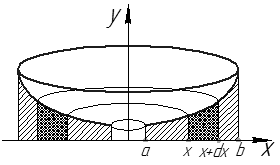


Рис. 27

Рассмотрим малый отрезок , где . При вращении соответствующей части фигуры получаем тело объема , где – площадь кольца радиусов и соответственно:

Тогда

Суммируя по тонким "слоям", получим

Общий случай:

Таким образом получаем для вращения фигуры, ограниченной линиями, имеем

При вращении фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 28).

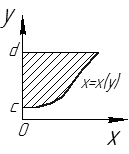
**

Рис. 28